ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG THỊ HẢI YẾN

BÀI TOÁN DIRICHLET ĐỐI VỚI TOÁN TỬ MONGE-AMPERE PHỨC TRONG LỚP $\mathcal{F}(f)$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG THỊ HẢI YẾN

BÀI TOÁN DIRICHLET ĐỐI VỚI TOÁN TỬ MONGE-AMPERE PHỨC TRONG LỚP $\mathcal{F}(f)$

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS. PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Hoàng Thị Hải Yến

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng đào tạo, bộ phận sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2016

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère phức được đặt như sau: Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền giả lồi chặt, μ là độ đo Borel trên Ω. Hãy tìm lớp các hàm đa điều hòa dưới $\mathcal{P}(\Omega)$ thích hợp trên đó toán tử Monge-Ampère phức $(dd^c.)^n$ được xác định tốt sao cho với hàm h liên tục trên $\partial\Omega$, bài toán sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{P}(\Omega), (dd^c u)^n = \mu, \\ \lim\limits_{z \to x} u(z) = h(x), x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Bài toán Dirichlet đối với hàm đa điều hòa dưới đã được nghiên cứu đầu tiên bởi Brememann vào năm 1959. Sau đó, năm 1976, Bedford và Taylor đã giới thiệu toán tử Monge-Ampère phức và giải Bài toán Dirichlet (1.1) khi $\mathcal{P}(\Omega) = PSH(\Omega) \cap L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ và độ đo μ là liên tục tuyệt đối đối với độ đo Lebesgue. Từ đó một số tác giả như U.Cegrell, L.Persson và S.Kolodziej, Z.Blocki đã cố gắng giải bài toán bỏ qua tính liên tục của mật độ của μ. Năm 1996, S.Kolodziej đã cho điều kiện đủ đối với tính giải được của bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère phức trên lớp $PSH(\Omega) \cap L^{\infty}_{loc}(\Omega)$. Đối với các độ đo kỳ dị, tính giải được của bài toán Dirichlet đã được giải quyết bởi L. Lempert, J.P.Demailly và P. Lelong. Năm 2004, U. Cegrell đã đưa ra định nghĩa tổng quát của toán tử Monge-Ampère, định nghĩa lớp năng lượng $\mathcal{F}$ và giải bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère trong lớp đó.

Theo hướng nghiên cứu trên, chúng tôi chọn "*Bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampere phức trong lớp* $\mathcal{F}(f)$" làm đề tài nghiên cứu của mình, trong đó đã trình bày các kết quả gần đây của P. Ahag về giải bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère phức trong lớp $\mathcal{F}(f)$.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu giải bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère phức trong lớp $\mathcal{F}(f)$.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

+ Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm cực trị tương đối, toán tử Monge-Ampère, nguyên lý so sánh.

+ Trình bày kết quả nghiên cứu về giải bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère phức trong lớp $\mathcal{F}(f)$.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 41 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm cực trị tương đối, toán tử Monge-Ampère, nguyên lý so sánh và các hệ quả của nó.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn. Phần đầu của chương, trình bày dáng điệu trên biên của hàm trong các lớp $\mathcal{E}_p$, Định nghĩa toán tử Monge – Ampère trong lớp $\mathcal{E}(f)$ và $\mathcal{F}$. Trong mục 2.2 đã chỉ ra rằng có thể định nghĩa toán tử Monge-Ampère trên các lớp đó theo cách xấp xỉ. Mục 2.3 được dành để trình bày việc giải bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère trong lớp $\mathcal{F}(f)$. Đặc biệt, trong [8], Cegrell giải bài toán Dirichlet đối với $f = 0$. Phần cuối cùng của chương này trình bày chứng minh nguyên lý so sánh, nhờ sử dụng phương pháp chứng minh của Định lý 2.3.3.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử X là không gian tôpô. Hàm $u : X \to [-\infty, +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên trên X nếu với mỗi $a \in \mathbb{R}$ tập

$$X_a = \{x \in X : u(x) < a\}$$

là mở trong X. Hàm $v : X \to (-\infty, +\infty]$ gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu $-v$ là nửa liên tục trên X.

Định nghĩa trên tương đương với định nghĩa mang tính địa phương sau: Giả sử $u : X \to [-\infty, +\infty)$. Ta nói hàm u là nửa liên tục trên tại $x \in X$ nếu $\forall e > 0$ tồn tại lân cận U_{x_0} của x_0 trong X sao cho $\forall e \in U_{x_0}$ ta có:

$$u(x) < u(x_0) + e \text{ nếu } u(x_0) \neq -\infty$$

$$u(x) < -\frac{1}{e} \text{ nếu } u(x_0) = -\infty .$$

Giả sử $E \subset X$ và $u : E \to [-\infty, +\infty)$ là hàm trên E. Giả sử $x_0 \in \bar{E}.$ Ta định nghĩa

$$\limsup_{x \to x_0,\, x \in E} u(x) = \inf\{\sup\{u(y) : y \in V\}\}$$

ở đó inf lấy trên các V chạy qua các lân cận của x_0. Khi đó có thể thấy rằng hàm $u : X \to [-\infty, +\infty)$ là nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu $\limsup_{x \to x_0} u(x) \le u(x_0).$ Ta có kết quả sau.

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ gọi là điều hòa dưới trên Ω nếu nó nửa liên tục trên trên Ω và thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên Ω, nghĩa là với mọi $w \in \Omega$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $0 \le r \le \delta$ ta có

$$u(w) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w + re^{it})dt. \qquad (1.2)$$

Kí hiệu tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là $SH(\Omega)$.

Mệnh đề 1.1.3. *Giả sử u, v là các hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω trong $\mathbb{C}$. Khi đó:*

(i) $\max(u,v)$ *là hàm điều hòa dưới trên* Ω.

(ii) *Tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là một nón, nghĩa là nếu $u,v \in SH(\Omega)$ và $a, b > 0$ thì $au + bv$ cũng thuộc $SH(\Omega)$.*

Định lý 1.1.4. *Giả sử $\{u_n\}$ là dãy giảm các hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω trên $\mathbb{C}$ và $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Khi đó u là hàm điều hòa dưới trên* Ω.

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh u nửa liên tục trên trên Ω. Với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$, tập

$$\{z \in \Omega : u(z) < \alpha\} = \bigcup_n^{\infty} \{z \in \Omega : u_n(z) < \varepsilon\}.$$

Do đó nó là tập mở. Vậy u nửa liên tục trên trên Ω. Do mỗi u_n thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình nên dùng định lý hội tụ đơn điệu suy ra u cũng thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên Ω. Do đó u là hàm điều hòa dưới trên Ω.

1.2. Hàm đa điều hoà dưới

Định nghĩa 1.2.1. Cho Ω là một tập con mở của $\mathbb{C}^n$ và $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với $-\infty$ trên bất kỳ thành phần liên thông nào của Ω. Hàm u được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi $a \in \Omega$ và $b \in \mathbb{C}^n$, hàm $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ là điều hoà dưới hoặc trùng $-\infty$ trên mỗi thành phần của tập hợp $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$.